GOTTLOB FREGE
UNA INTRODUCCIÓN

Por: Francisco Melgar Wong

Gottlob Frege (Wismar, 1848 – Bad Kleinen, 1925). Filósofo, lógico y matemático alemán. Es considerado – junto con Bertrand Russell y Ludwig Wittgenstein – uno de los fundadores de la filosofía analítica. A finales del siglo XIX, los aportes de Frege en la lógica proposicional y en la lógica de predicados lo convirtieron en el mayor innovador de la lógica desde Aristóteles. En la actualidad, sus escritos sobre semántica y filosofía de la lógica son considerados el punto de partida para la semántica formal y la filosofía del lenguaje.

El primer libro de Frege, *Begriffsschrift* (1879), ofreció la primera formulación sistemática de la lógica proposicional e introdujo los cuantificadores que hicieron posible la creación de la lógica de predicados. Estos dos aportes habrían bastado para que Frege pasara a la historia como uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos, pero estas innovaciones eran sólo el primer paso hacia un objetivo mayor: reducir la aritmética a la lógica. Esto es, demostrar que todas las proposiciones aritméticas pueden ser probadas como teoremas a partir de los principios básicos de la lógica.

A pesar de ser uno de los libros de lógica más importantes que se han escrito, *Begriffsschrift* no fue bien recibido por la comunidad filosófica. Por ello, siguiendo el consejo de un amigo, Frege publicó una versión más accesible de sus ideas, *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), donde sostuvo que las proposiciones aritméticas no son sintéticas a priori, tal como pensaba Kant pensaba, ni sintéticas a posteriori, tal como pensaba Mill, sino analíticas a priori, tal como había afirmado Leibniz. En este libro, considerado uno de los textos fundadores de la filosofía analítica, Frege definió las aserciones sobre números como aserciones sobre conceptos.

Considérense las siguientes oraciones:

1. El número de lunas de Venus = 0
2. El número de objetos cayendo bajo el concepto *luna de Venus* = 0

Frege se apoyó en la relación de identidad y en la verdad indiscutible de (1) y (2) para afirmar que las expresiones “El número de lunas de Venus” y “0” son nombres que refieren a objetos. Por ello, concluyó que los números tienen que ser objetos.

La definición de las aserciones sobre números como aserciones sobre conceptos también le permitió a Frege definir los números en términos de extensiones de conceptos: cero es el número que le pertenece al concepto *no idéntico a sí mismo*, uno es el número que le pertenece al concepto cuya extensión es un único objeto, y así sucesivamente. Luego, valiéndose de la noción de *sucesor*, Frege definió el resto de los números naturales. Una vez que tuvo listas estas definiciones, Frege se propuso demostrar cómo la aritmética podía derivarse de la lógica.

Esta derivación iba a ser el tema de su tercer libro, *Grundgesetze der Arithmetik*, cuyo primer volumen apareció en 1893. Una década más tarde, cuando el segundo volumen de la obra ya estaba en imprenta, Frege recibió una carta de Bertrand Russell donde el filósofo inglés le señalaba una paradoja provocada por uno de los axiomas de su derivación. La paradoja, hoy conocida como "la paradoja de Russell", afirmaba la existencia del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, de lo cual se seguía que para no ser miembro de sí mismo, este conjunto debía ser miembro de sí mismo.

Aunque el descubrimiento de esta paradoja echó por tierra su proyecto de reducir la aritmética a la lógica, el intento obligó a Frege a importar las nociones matemáticas de *función* y *argumento* al análisis lógico. Este hecho fue de enorme importancia para la lógica, la semántica y la filosofía, ya que marcó el punto de partida del análisis cuantificacional y el inicio de la filosofía del lenguaje tal como la conocemos hoy día.

En su artículo "Über Funktion und Begriff" (1891), Frege extendió el análisis en términos de *función* y *argumento* a los lenguajes naturales. Además, distinguió entre la expresión que designa la función y la función en sí misma.

Considérese la siguiente expresión:

'$2. x^3 + x$'.

La función a la que esta expresión funcional designa puede ser una función para cualquier argumento que ocupe el lugar vacío indicado por la variable 'x'. Tomemos como argumento al número 1. En este caso, $2. 1^3 + 1$ es la función para el argumento 1. Una vez que el espacio vacío de la función es completado por el argumento, la función obtiene un valor. En este caso, 3 es el valor de la función para el argumento 1, ya que al usar 1 como argumento obtenemos el número 3.

En este mismo artículo, Frege anota que hay signos ('>', '<', '=') que sirven para formar expresiones de funciones cuyo valor es un valor de verdad. Este tipo de expresiones, dice, refieren a lo Verdadero y a lo Falso.

Por ejemplo:

'$2. x^2 + x = 3$'

Si la función referida por la expresión '$2. x^2 + x = 3$' toma como argumento al número 1, el resultado, expresado como '$2. 1^3 + 1 = 3$', refiere a lo Verdadero. En este caso, decimos que lo Verdadero es el valor para $2. x^2 + x = 3$.

Cuando pasamos del lenguaje de las matemáticas a los lenguajes naturales, Frege asume que las oraciones declarativas también son el resultado de funciones que toman objetos como argumentos y cuyos referentes son valores de verdad.

Por ejemplo, considérese la siguiente expresión funcional:

'*x* era alemán'.

Si la función referida por la expresión '*x* era alemán' toma como argumento al propio Frege, el resultado es expresado por la oración 'Frege era alemán', que refiere a lo Verdadero, dado que Frege fue alemán.

El uso que Frege le dio a las nociones de *función* y *argumento* tuvo un gran impacto en la semántica y la lógica. En primer lugar, las oraciones del lenguaje natural dejaron de ser analizadas en términos de sujeto y predicado y pasaron a ser analizadas en términos de *función* y *argumento*. Por otro lado, los operadores lógicos ("no es el caso que", "y", "o", "si…entonces", "si y sólo si") se interpretaron como expresiones que están por funciones que toman oraciones simples como argumentos y generan oraciones compuestas, o, en el caso de los cuantificadores ('por lo menos un', 'todo'), como expresiones que están por funciones que toman oraciones simples y generan oraciones existenciales u oraciones universales

Dado que las palabras se usan para referir a objetos, propiedades y relaciones, las oraciones declarativas se usan para representar estados de cosas en el mundo. Por ello, es natural pensar que el significado de estas palabras y de estas oraciones es aquello a lo que se refieren. Pero la aparición de un problema semántico llevó a Frege a considerar que el significado de los nombres propios y de las descripciones definidas no podía ser aquello a lo que referían. El problema, conocido como "Frege's Puzzle" ("el enigma de Frege") es el siguiente:

a. Héspero es el cuerpo celeste visible más luminoso en el cielo del atardecer.
b. Héspero es Fósforo.
c. Héspero es Héspero.

Aunque los nombres 'Héspero' y 'Fósforo' y la descripción definida 'el cuerpo celeste visible más luminoso en el cielo del atardecer' se usan para referir al mismo objeto – a saber, el planeta Venus – alguien podría leer (a), (b) y (c), entender las tres oraciones, y, a pesar de ello, pensar que (a) es más informativa que (b) y que (b) es más informativa que (c). Así mismo, también podría pensar que (a) y (b) son falsas y que (c) es verdadera.

Frege piensa que si el significado de los nombres y la descripción definida fuese el objeto al que estas expresiones se refieren, (a), (b) y (c) tendrían el mismo significado. Pero, si esto fuera así, ¿cómo puede alguien entender las tres oraciones y pensar que una es verdadera y las otras son falsas? Frege concluye que a pesar de referirse a lo mismo, (a), (b) y (c) no significan lo mismo. "Héspero", "Fósforo" y "el cuerpo celeste visible más luminoso en el cielo del atardecer" tienen un mismo referente – a saber, Venus – pero tienen un significado distinto o, en términos de Frege, un sentido distinto. Esta es la razón por la que estas expresiones hacen distintas contribuciones al sentido o al significado de las oraciones que las contienen. Esta distinción entre el sentido y el referente de las expresiones es la idea fregeana que más influencia ha tenido en la filosofía del lenguaje, y hasta el día de hoy es motivo de discusión y controversia.

Detrás del análisis fregeano del sentido de las oraciones declarativas se encuentra el célebre principio de composicionalidad, postulado por Frege en su artículo más célebre, "Über Sinn und Bedeutung" (1892). Según este principio el sentido o significado de una oración es una función del sentido o significado de sus partes y de la forma gramatical que combina a estas partes. Este principio resultó ser fundamental para el desarrollo posterior de la semántica formal, donde se usa para calcular el significado lingüístico de las expresiones mayores a las unidades léxicas.

Si bien hoy en día los aportes de Frege a la lógica, la filosofía de las matemáticas y la filosofía del lenguaje son considerados fundamentales, en su momento fueron pocos los filósofos que se percataron de la importancia de sus ideas. De hecho, después del descubrimiento de "la paradoja de Russell", Frege se deprimió, abandonó la idea de reducir la aritmética a la lógica y prácticamente dejó de escribir.

Poco antes de morir, en una nota añadida a su testamento, Frege le entregaba sus artículos a su hijo Alfred. En esa nota escribió:

> "Querido Alfred.
>
> No te deshagas de los artículos que he escrito. Aunque no todo sea oro, hay oro en ellos. Creo que aquí hay cosas que algún día serán valoradas mucho más de lo que se les valora actualmente. Cuida de que nada se pierda".

Vaya que había oro en ellos.